Bigbangprofe: Cálculo 1 UNI (Cachimbos)

Semana 1

PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}([\![x-2]\!])-\sqrt{[\![|x-1|-3]\!]}}}+\log_{[\![x-2]\!]}|x|$$

PREGUNTA 2

Dada las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}|x-6| & ;\ x<-2\\ [\![2^{x-1}]\!] & ;x\in\langle -1;3]\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-x-1 & ;\ x\in\langle -2;2\rangle\\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{2x-6}{x+4}\right) & ;\ x\in\langle -\infty;-2]\cup[2;\infty]\end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de la función $k=f+g$

PREGUNTA 3

Dada las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & ;\ x\in[-5;-1]\\ [\![\dfrac{2(x+1)}{x-1}]\!] & ;\ x\in\langle 0;1\rangle\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(x^2-16) & ;\ x\le 0\\ \log_3(2^x-1) & ;\ x>1\end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de fog

1) Sean las funciones:

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^2Sgn\left(\tfrac{x-5}{|x|-2}\right)+2x\left\|\tfrac{x}{4}\right\| \quad \text{Donde } \left|\tfrac{x^2}{4}-2\right|\le 2$$

$$g(x)=\begin{cases}[\![x]\!] & x\in[0,2>\\ \sqrt{x^2-4} & x\in[2,6>\end{cases}$$

Hallar $(f+g^2)_{(x)}$, trazar su gráfica indicando su rango.

2) Dadas las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ \sqrt{x^2+16} & 0\le x\le 3\\ \frac{2}{x^2-4} & x>3\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}x^2+10x+21 & x\in[\sqrt{3},2]\\ \frac{|x-2|-1}{|x+3|} & x\in<0,2]\end{cases}$$

Si se cumple que: $f^*=hog$, determinar si existe la función h. Justificar procedimiento.

3) Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(|x+10|+|x+5|)}{x} & -10\le x\le -5\\ \dfrac{x^2-2x+5}{4} & -5<x\le 1\\ 1-\sqrt{8+2x-x^2} & 1<x\le 4\end{cases}$$

Determinar si f es inyectiva. Si no lo es, restringir el dominio, lo menos posible, de modo que sea inyectiva. Luego, halle f^*.

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Para todo $x\in\mathbb{R}$, $\cosh^2(3x)+\sinh^2(3x)=1$ (1.5 ptos)

b) Si $f(x)=\ln(x^2+x-1)$, entonces $dom(f)=<-\infty,\frac{1-1\sqrt{5}}{2}>\cup<\frac{1-1\sqrt{5}}{2},\infty>$. (1pto)

c) Para todo $x\in\mathbb{R}$, $sgn(sgn(x))=-sgn(x)$. (1pto)

d) El inverso de $f(x)=3^x$ es $g(x)=\log_3 x$. (1.5 ptos)

2. Dados $(a,\,b)$ y $(c,\,d)$ intervalos abiertos, con $b\le c$, y las funciones estrictamente crecientes $f_1:(a,\,b)\to\mathbb{R}$ y $f_2:(c,\,d)\to\mathbb{R}$. Considere la función $f:(a,\,b)\cup(c,\,d)\to exp(Ran(f_1))\cup Ran(f_2)$ definida como:

$$f(x)=\begin{cases}(exp\circ f_1)(x), & \text{Si } x\in(a,\,b),\\ f_2(x) & \text{Si } x\in(c,\,d).\end{cases}$$

Muestre la siguiente proposición: f es monótona si y solo si para todo z_1,z_2 tales que $z_1\in exp(Ran(f_1))$ y $z_2\in Ran(f_2)$, se cumple que $z_1\le z_2$. (5ptos)

3. a) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función impar y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función par, que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^{14}f(x)-xf\left(x^{13}\right)=g(x),\forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

calcule $f^2(x)+g^2(x)$.

b) Sean $a,b>0$, $\frac{a}{b}=p\in\mathbb{N}$, y f una función tal que

$$f(x)=\left((a-b)\cos x+b\cos\left(\frac{a-b}{b}x\right)\right)r(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

donde r es una función periódica de periodo $\frac{n}{m}\pi$, para $n,m\in\mathbb{N}$ primos entre si. Si T_p es el periodo de f y T_r el periodo de r, entonces pruebe que

$$E_p=\frac{T_p}{T_r},p\ge 1.$$

Aquí

$$E_p=\begin{cases}2m, & p>1\\ 1, & p=1\end{cases}$$

(5ptos)

Bigbangprofe